

БІРІНШІ MANUS БЕТА ТУРНИРІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДЕРІ

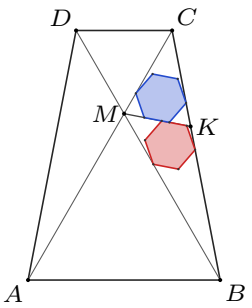
7-8 СЫНЫПТАР

Төменде берілген есептерді олардың авторларын көрсетпей пайдалануға тыйым салынады.

1 (17 ұпай). *Теңбүйірлі $ABCD$ трапециясының AB және CD табандарының қатынасы $2:1$. Диагональдары M нүктесінде қиылысады, әрі $\angle BMC = 120^\circ$. BC бүйір қабырғасынан $BK : KC = 8:5$ болатындай K нүктесі алынған.*

BMK және CMK үшбұрыштарының әрқайсысына бір қабырғасы MK кесіндісінде жататын, ауданы мүмкіндігінше үлкен дұрыс алтыбұрыш орналастырылған. BMK ішіндегі алтыбұрыш қызыл, ал CMK ішіндегісі көк түске боялған.

Қай алтыбұрыштың ауданы үлкен?



(Фольклорлық есеп негізінде)

Жауабы: Көк алтыбұрыштың ауданы үлкен.

Шешуі. AMB және CMD үшбұрыштарының ұқсастығынан $BM : MC = 2:1$. $BM = 2$, $MC = 1$, $MK = d$ деп алайық. $CP, KT \perp MB$ және $BH, CJ \perp MK$ перпендикулярларын түсірейік. P нүктесі BM сәулесінде M-нен әрі, ал H нүктесі MK сәулесінде K-дан әрі жатады.

$\angle CMP = 60^\circ$ болғандықтан, $MP = 1/2$, $CP = \sqrt{3}/2$. BKT және BCP үшбұрыштарының ұқсастығынан

$$MT = 2 - \frac{8}{13}\cdot\frac{5}{2} = \frac{6}{13}, \quad KT = \frac{8}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}, \quad d^2 = MT^2 + KT^2 = \frac{84}{169}.$$

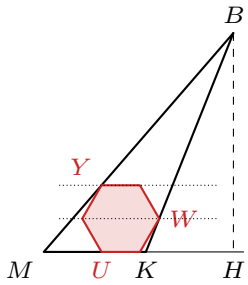
MBH және MKT үшбұрыштарының ұқсастығы бойынша

$$\frac{MH}{BH} = \frac{MT}{KT} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{d}{BH} = \frac{d^2}{2KT} = \frac{7\sqrt{3}}{26}.$$

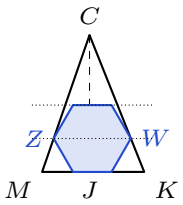
Аудандарды салыстырсақ, $BH : CJ = BK : KC = 8:5$. Сондықтан

$$\frac{KH}{BH} = \frac{KJ}{CJ} = \frac{3\sqrt{3}}{13}, \qquad \frac{MJ}{CJ} = \frac{8}{5}\cdot\frac{d}{BH} - \frac{KJ}{CJ} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Алтыбұрыштың қабырғасын s деп, ал M-нен оның MK бойындағы қабырғасының жақын ұшына дейінгі қашықтықты u деп белгілейік. Екі бүйір төбесінің биіктігі $\sqrt{3}s/2$ және олар төменгі қабырғаның ұштарынан екі жаққа $s/2$ шамасына шығып тұрады; жоғарғы қабырғасының биіктігі $\sqrt{3}s$.



қызыл



көк

Қызыл алтыбұрыштың Y, W төбелері үшін:

$$u \ge \frac{3}{2}s,$$
$$u + \frac{3}{2}s \le d + \frac{9}{26}s.$$

Көк алтыбұрыштың Z, W төбелері үшін:

$$u - \frac{1}{2}s \ge \frac{3}{10}s,$$
$$u + \frac{3}{2}s \le d - \frac{9}{26}s.$$

Қалған төбелерден шығатын шектеулер бұлардан күштірек емес. Демек, $s_{\text{қыз}} \le 26d/69$, $s_{\text{көк}} \le 65d/172$. Екі шекке де жетуге болады: $u = 3s/2$ болғанда қызыл алтыбұрыш үшбұрыш қабырғаларына Y, W төбелерімен, ал $u = 4s/5$ болғанда көк алтыбұрыш Z, W төбелерімен тиеді. Олай болса,

$$\frac{s_{\text{көк}}}{s_{\text{қыз}}} = \frac{65\cdot 69}{172\cdot 26} = \frac{345}{344} > 1.$$

Көк алтыбұрыштың қабырғасы үлкен, сондықтан ауданы да үлкен.

Бағалау критерийлері (ең көбі 17 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Ұқсастық пен тікбұрышты үшбұрыштар арқылы қажетті биіктіктер мен кесінділердің қатынастары табылған.	3
Қызыл алтыбұрыш үшін $s \le 26MK/69$ бағалауы және осы шекке жетуге болатыны дәлелденген.	6
Көк алтыбұрыш үшін $s \le 65MK/172$ бағалауы және осы шекке жетуге болатыны дәлелденген.	6
Қабырғалар дәл салыстырылып, аудандар туралы қорытынды жасалған.	2

2 (10 ұпай). *Әртүрлі сегіз натурал $a_1, a_2, \ldots, a_8$ саны таңдалған. Мына санның бүтін екені белгілі:*

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}}}}$$

Таңдалған сандардың ең үлкенінің мүмкін болатын ең кіші мәні қандай?

(Кенжегали Нурас)

Жауабы: 24.

Шешуі. Таңдалған сегіз санның көбейтіндісі бүтін санның сегізінші дәрежесі болуы тиіс. Сондықтан оның жай көбейткіштерге жіктелуіндегі әрбір дәреже көрсеткіші сегізге еселі.

Барлық сан 24-тен кіші болсын. Кез келген жай $p \geq 5$ санының тіпті 1-ден 23-ке дейінгі барлық сандардың көбейтіндісіндегі көрсеткіші де сегізден кіші: 5 үшін ол 4, 7 үшін 3, 11 үшін 2, ал қалғандары үшін 1-ден аспайды. Демек, таңдалған сандардың ешқайсысы жай $p \geq 5$ санына бөлінбейді. Тек мына сандар қалады:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18.$$

Осы тізімдегі барлық сандардың көбейтіндісінде үштің көрсеткіші $1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 7$. Ал таңдалған сандардың көбейтіндісінде ол сегізге еселі, демек, нөлге тең. Онда тек $1, 2, 4, 8, 16$ қалады: сегіз санның орнына небәрі бес сан. Қайшылық.

Ең үлкен сан 24 болғанда мына жиын жарайды:

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24, \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 = 2^8 \cdot 3^8 = 6^8.$$

Көбейтіндінің сегізінші дәрежелі түбірі 6-ға тең. Демек, табылған мәнге жетуге болады.

Бағалау критерийлері (ең көбі 10 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Көбейтіндінің бүтін санның сегізінші дәрежесі болатыны анықталған.	1
Ең үлкен сан 23-тен аспағанда жай $p \geq 5$ бөлгіштері болмайтыны дәлелденіп, мүмкін сандар тізімі берілген.	3
Үшке еселі сандар болмайтыны және сегіз әртүрлі сан таңдау мүмкін еместігі дәлелденген.	4
Ең үлкені 24 болатын жарамды жиын беріліп, оның көбейтіндісі тексерілген.	2

3 (4 ұпай). *$\overline{КРУГ}$ саны дөңгелек сан. $\overline{УГОЛ}$ санының дөңгелек сан бола алмайтынын дәлелдеңіз.*

(7-сынып оқушысы ұсынған)

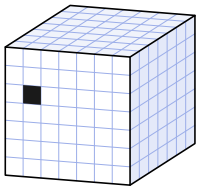
Жауабы: Бола алмайды.

Шешуі. Дөңгелек сан нөлмен аяқталады. Сондықтан $\text{Г} = 0$. Әртүрлі әріптерге әртүрлі цифрлар сәйкес келеді, демек, $\text{Л} \neq 0$. Олай болса, $\overline{\text{УГОЛ}}$ саны нөлмен аяқталмайды және дөңгелек сан емес.

Бағалау критерийлері (ең көбі 4 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
$\overline{\text{КРУГ}}$ санының дөңгелек болуынан $\text{Г} = 0$ екені алынған.	2
$\text{Л} \neq 0$ екені алынып, $\overline{\text{УГОЛ}}$ саны туралы қорытынды жасалған.	2

4 (18 ұпай). *Кубтың әр жағы* 2027×2027 *бірдей шаршы торкөзге бөлінген. Бастапқыда бір торкөз қара түске боялған.*
Әр минут сайын кемінде бір қара торкөзбен ортақ қабырғасы бар барлық ақ торкөз бір мезгілде қара түске боялады. Кубтың қыры арқылы көршілес жатқан торкөздер де ескеріледі.
Куб бетінің толық боялуына кететін уақыттың барлық мүмкін мәндерін табыңыз (минутпен).



Бөлінуі шартты түрде көрсетілген.

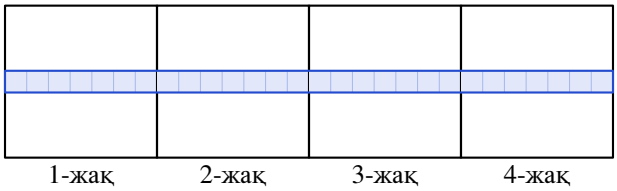
(Иван Ященко, толықтырумен)

Жауабы: 4054-тен 6080-ге дейінгі барлық бүтін мән, шеткі мәндерді қоса алғанда.

Шешуі. Әр қырда $n = 2027$ торкөз болсын, бір торкөздің қабырғасы 1-ге тең. Екі торкөздің арақашықтығы деп ортақ қабырғалар арқылы бірінен екіншісіне өтудің ең аз санын атайық. t минуттан кейін бастапқы торкөзден арақашықтығы t-дан аспайтын торкөздер ғана боялады. Демек, S торкөзінен бастап бүкіл бетті бояу уақыты $T(S)$ осы торкөзден куб бетіндегі торкөздерге дейінгі арақашықтықтардың ең үлкеніне тең.

Кубты айнала өтетін торкөздер белдеуін қарастырайық: ол төрт жақтың әрқайсысында ені 1 болатын жолақты алады. Белдеу $4n$ торкөзден тұратын цикл құрайды, сондықтан оның кез келген екі торкөзінің арасында $2n$-нен аспайтын қадаммен жүруге болады. Әртүрлі жақтардағы екі торкөз үшін біріншісі арқылы өтіп, екіншісі жатқан жақты кесіп өтетін белдеу таңдайық. Бұл жақта белдеудің екінші торкөзбен бір қатарда жатқан торкөзі табылады; оған дейін $n-1$-ден аспайтын қадам қажет. Демек, екі торкөздің арақашықтығы $2n + (n-1) = 3n-1$-ден аспайды. Бір жақта жатқан торкөздер үшін $2n-2$ қадам жеткілікті. Сондықтан әрқашан $T(S) \le 3n-1$.

$4n$ торкөзден тұратын белдеу; шеткі қабырғалар беттестіріледі



Кез келген бастапқы торкөз үшін кемінде $2n$ минут қажет екенін көрсетейік. S торкөзіне куб центріне қатысты симметриялы торкөзді S' деп белгілейік. S жатқан жақты төменгі, оған қарама-қарсы жақты жоғарғы деп атайық. Торкөз центрлерін торкөздер бойымен өтетін кез келген жолмен қосайық. Бір жақтың ішінде көршілес торкөзге өткенде центр қырлардың бір бағытымен 1-ге, ал куб қыры арқылы өткенде осындай екі бағытпен $1/2$-ден ығысады. Сондықтан бір қадамның кез келген екі өзара перпендикуляр қыр бағытына проекциялары ұзындықтарының қосындысы 1-ден аспайды.

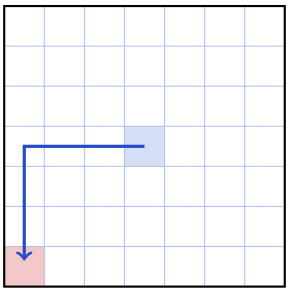
Төменгі жақтан жоғарғы жаққа баратын жол міндетті түрде бір бүйір жаққа түседі. S центрінен осы жақтың жазықтығына дейінгі қашықтық a болсын. Центрлік симметрия бойынша S' центрінен сол жазықтыққа дейінгі қашықтық $n-a$ болады. Жол алдымен осы жазықтыққа жетіп, кейін S'-ке келгенше, оған перпендикуляр бағытта барлығы кемінде $a + (n-a) = n$ жүреді. Сонымен бірге биіктік бағытындағы толық орын ауыстыру кемінде n. Осы екі бағыттағы қозғалысқа кемінде $2n$ қадам керек. Демек, $T(S) \ge 2n$.

Бастапқы торкөз бұрышта жатсын. Қарама-қарсы жақтан кубтың қарама-қарсы төбесіне жанасатын бұрыштық торкөзді алайық. Олардың центрлері арасында биіктік бойынша n, ал көлденең қырлардың екі бағытының әрқайсысы бойынша $n-1$ жүру қажет. Қосындысы $3n-2$. Осынша қадамдық жол ешбір бағытта кері қайтпай, тек мақсатқа қарай жылжуы тиіс. Бірақ бүйір жаққа шығу үшін оның жазықтығына жету керек; бұл жазықтық көлденең бағыттардың бірі бойынша бастапқы не соңғы центрден жарты торкөз әрі жатады. Сондықтан кері қозғалыс міндетті түрде болады, яғни $3n-2$ қадам жеткіліксіз. Қадам саны бүтін болғандықтан, ол кемінде $3n-1$. Жалпы жоғарғы бағалаумен бірге $T(S)=3n-1$ аламыз.

Енді жақтың ортасындағы торкөзден бастайық; n тақ болғандықтан, мұндай торкөз бар. Сол жақтағы торкөзге жетуге $n-1$ қадам, көршілес жаққа жетуге $2n-1$-ден аспайтын қадам жеткілікті: екі жақты жазықтыққа жайғанда көлденең ығысу $n/2+(n-1/2)$-ден, бойлық ығысу $(n-1)/2$-ден аспайды.

Қарама-қарсы жақтағы Q торкөзінен осы жақтың қабырғаларына параллель екі орта сызығына дейінгі торкөзбен өлшенген қашықтықтарды a, b деп белгілейік. Осы жаққа бірінші бағыттағы белдеу бойымен барсақ, Q-мен бір қатардағы белдеу торкөзіне дейін $2n-a$ қадам керек: орталық торкөзден a-ға ауытқу екі жарты белдеудің бірін дәл a-ға қысқартады. Одан кейін b қадам қалады. Демек, жол ұзындығы $2n-a+b$-ден аспайды. Перпендикуляр бағыттағы белдеу $2n-b+a$ бағалауын береді. Екеуінің кішісі $2n-|a-b|\le 2n$. Сондықтан орталық торкөзден бүкіл бет $2n$ минутта боялады.

Екі шеткі мәннің арасындағы барлық бүтін мән алынатынын дәлелдеу қалды. Бастапқы торкөзді көршісіне ауыстырғанда кез келген бекітілген торкөзге дейінгі арақашықтық ең көбі 1-ге өзгереді. Демек, осы арақашықтықтардың ең үлкені де ең көбі 1-ге өзгереді. Бір жақтың орталық торкөзінен бұрыштық торкөзіне қарай жүрейік. Басында уақыт $2n$, соңында $3n-1$, сондықтан жол бойында олардың арасындағы барлық бүтін мән кездеседі.



ортасы: $T=2n$

бұрышы: $T=3n-1$

көршілес бастау нүктелері: айырмасы 1-ден аспайды

Сонымен, $n=2027$ болғанда $2\cdot 2027=4054$-тен $3\cdot 2027-1=6080$-ге дейінгі барлық бүтін сан алынады.

Бағалау критерийлері (ең көбі 18 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Боялу уақыты торкөздер арасындағы ең үлкен арақашықтықпен байланыстырылған.	1
Кез келген бастапқы торкөз үшін $3n-1$ жоғарғы бағалауы дәлелденген.	4
Кез келген бастапқы торкөз үшін $2n$ төменгі бағалауы дәлелденген.	5
Орталық торкөзде $2n$, бұрыштық торкөзде $3n-1$ мәніне жететіні дәлелденген.	5
Аралық бүтін мәндердің бәрі алынатыны дәлелденіп, $n=2027$ үшін жауап табылған.	3

5 (8 ұпай). *Ұзындығы 20 км жол A пунктінен басталып, B пунктінде аяқталады. Алғашқы 10 км асфальтталған, қалған 10 км топырақ жол. Петя мен Вася A және B пункттерінен бір мезгілде бір-біріне қарсы шықты. Асфальтта Петяның жылдамдығы 6 км/сағ, Васянікі 4 км/сағ. Топырақ жолда олардың жылдамдықтары бірдей сан есе азаяды; бұл сан белгісіз және бірден үлкен. Олар топырақ жол басталған жерден 3 км қашықтықта кездесті.*

Осыдан кейін бұрынғы асфальттың соңынан бастап топырақ жолдың бір бөлігін асфальттауға шешім қабылданды. Келесі жолы Петя мен Вася жолдың қарама-қарсы ұштарынан бір мезгілде шығады, бірақ кімнің A-дан, кімнің B-дан шығатыны алдын ала белгісіз. Олар қай пункттен шықса да асфальтта кездесуі үшін топырақ жолдың кемінде қанша бөлігін асфальттау қажет?

(Таған Адилет)

Жауабы: $\dfrac{10}{3}$ км.

Шешуі. Топырақ жолда жылдамдықтар k есе кемісін. Алғашқы кездесуге дейін Петя асфальтпен 10 км, топырақ жолмен 3 км, ал Вася топырақ жолмен 7 км жүрген. Жүру уақыттары тең, сондықтан

$$\frac{10+3k}{6}=\frac{7k}{4}, \qquad 20+6k=21k, \qquad k=\frac{4}{3}.$$

Қалған топырақ жолдың әр километрін ұзындығы $4/3$ км болатын шартты асфальт жолмен алмастырайық. Әр қатысушының жолды жүріп өту уақыты сақталады, ал бүкіл шартты жолдағы жылдамдықтар қатынасы тұрақты болып, $6:4=3:2$-ге тең болады.

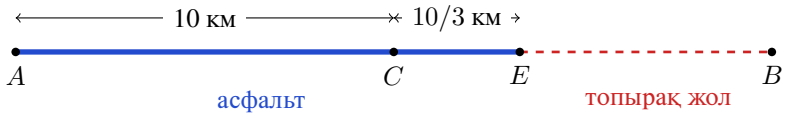
Қосымша x км жол асфальталсын. Нақты асфальттың ұзындығы $10+x$, қалған топырақ жолдың ұзындығы $10-x$, ал бүкіл шартты жолдың ұзындығы

$$L=10+x+\frac{4}{3}(10-x)=\frac{70-x}{3}.$$

Егер A-дан Петя шықса, кездескенге дейін ол шартты жолдың $3/5$ бөлігін, ал Вася шықса, $2/5$ бөлігін жүреді. Демек, A-дан алысырақ кездесу нүктесі бірінші жағдайда алынады. Екі жағдайда да кездесу асфальтта болуы үшін және тек сол үшін

$$\frac{3}{5}L\le 10+x \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{70-x}{5}\le 10+x \quad\Longleftrightarrow\quad x\ge\frac{10}{3}.$$

$x=10/3$ болғанда A-дан шыққан Петя мен B-дан шыққан Вася жаңа асфальттың дәл шекарасында кездеседі; орындары ауысқанда олар осы шекараға жетпей кездеседі. Ал x бұдан кіші болса, бірінші жағдайда кездесу топырақ жолда болады. Демек, табылған ұзындық қажетті әрі жеткілікті.



Бағалау критерийлері (ең көбі 8 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Алғашқы кездесуге сәйкес дұрыс теңдеу құрылып, $k=4/3$ табылған.	2
Топырақ жолды шартты асфальтпен алмастыру негізделіп, шартты жолдың ұзындығы табылған.	2
Бастау пункттерінің екі мүмкіндігі қарастырылып, $x\ge 10/3$ алынған.	2
$x=10/3$ мәнінің жеткіліктілігі және одан кіші мәннің жарамайтыны дәлелденген.	2

6 (15 ұпай). *Тақтада екі өрнек жазылған:*

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 \qquad \textit{және} \qquad 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1.$$

Бірінші өрнекке сандар мен амал таңбаларының ретін өзгертпей, жақшалар кез келген тәсілмен қойылған. Екінші өрнекке жақшалар дәл сол сұлба бойынша қойылған. Екі өрнектің мәндері әртүрлі натурал сандар болып шықты. Осы екі санның кішісінің мүмкін болатын ең үлкен мәні қандай?

(Сондер Таерин)

Жауабы: 140.

Шешуі. Жақшаларды ашқанда әр сан не алымға, не бөлімге түседі. Жақшалардың бірдей сұлбасы екі өрнектегі *орындардың* алым мен бөлімге бірдей бөлінуін анықтайды.

Бірінші орын әрқашан алымда, екінші орын бөлімде болады. Мұны индукциямен көреміз: $U : V$ өрнегінде U-дағы орындар өз қалпын сақтайды, ал V-дағылар алым мен бөлім арасында ауысады; екінші сан не U-ға кіреді, не сол жақ бір саннан тұрса, V-ның бірінші саны болады.

Бірінші өрнекте 7 саны бөлімде бола алмайды: басқа көбейткіштердің ешқайсысы 7-ге бөлінбейді, сондықтан өрнектің мәні бүтін шықпас еді. Сол сияқты 5 те алымда болуы тиіс. Екінші өрнекте 5 үшінші орында, демек, үшінші орын да алымда. Сонымен, бірінші, үшінші, бесінші және жетінші орындар алымда, екінші орын бөлімде.

Төртінші орын да алымда болуы тиіс. Әйтпесе бірінші өрнектің бөлімінде $2 \cdot 4 = 8$ болады, ал қалған сандардың ішінде тек 6 ғана бір 2 көбейткішін береді; барлық екіні қысқарту мүмкін емес.

Алтыншы орынның қайда түсетінін анықтау қалды. Егер ол бөлімде болса, өрнектердің мәндері

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 6} = 35, \qquad \frac{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 2} = 35,$$

болады, бұл есеп шартына қайшы. Демек, алтыншы орын алымда және өрнектердің мәндері

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 1260, \qquad \frac{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 140.$$

Осындай ортақ жақша сұлбасы шынында бар:

$$1 : (((((2 : 3) : 4) : 5) : 6) : 7) = 1260,$$
$$7 : (((((6 : 5) : 4) : 3) : 2) : 1) = 140.$$

Демек, екі әртүрлі натурал мәннің кішісі 140-қа тең және бұл мәнге жетуге болады.

Бағалау критерийлері (ең көбі 15 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Орындардың алым мен бөлімге ортақ бөлінуі және алғашқы екі орынның орналасуы негізделген.	2
Жай 5 және 7 сандары арқылы үшінші, бесінші, жетінші орындардың алымда екені анықталған.	4
Екіге бөлінгіштік арқылы төртінші орынның алымда екені дәлелденген.	3
Алтыншы орынның екі мүмкіндігі қарастырылып, $(35, 35)$ жұбы алынып тасталған.	3
$(1260, 140)$ жұбына ортақ жақша сұлбасы беріліп, жауап алынған.	3