

РЕШЕНИЕ ПЕРВОГО БЕТА ТУРНИРА MANUS

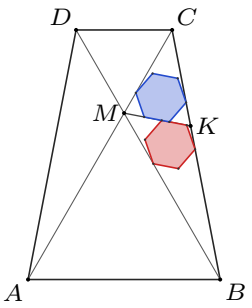
7-8 КЛАССЫ

Использование приведённых ниже задач
без указания их авторов запрещено.

1 (17 баллов). *В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AB и CD относятся как $2:1$. Диагонали пересекаются в точке M, причём $\angle BMC = 120^\circ$. На боковой стороне BC выбрана точка K так, что $BK:KC = 8:5$.*

В каждый из треугольников BMK и CMK помещён правильный шестиугольник наибольшей возможной площади при условии, что одна из его сторон лежит на отрезке MK. Шестиугольник в BMK окрашен красным, а в CMK синим.

Какой из двух шестиугольников имеет большую площадь?



(По мотивам фольклора)

Ответ: Синий шестиугольник имеет большую площадь.

Решение. Из подобия AMB и CMD имеем $BM:MC = 2:1$. Положим $BM = 2$, $MC = 1$, $MK = d$. Опустим $CP, KT \perp MB$ и $BH, CJ \perp MK$. Точка P лежит за M, H за K.

Из угла $CMP = 60^\circ$ получаем $MP = 1/2$, $CP = \sqrt{3}/2$. По подобию BKT и BCP

$$MT = 2 - \frac{8}{13}\cdot\frac{5}{2} = \frac{6}{13}, \quad KT = \frac{8}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}, \quad d^2 = MT^2 + KT^2 = \frac{84}{169}.$$

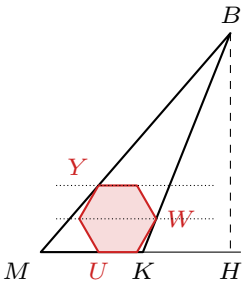
Подобие MBH и MKT даёт

$$\frac{MH}{BH} = \frac{MT}{KT} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{d}{BH} = \frac{d^2}{2KT} = \frac{7\sqrt{3}}{26}.$$

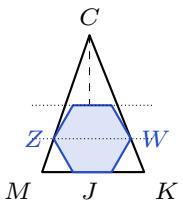
По площадям $BH:CJ = BK:KC = 8:5$. Поэтому

$$\frac{KH}{BH} = \frac{KJ}{CJ} = \frac{3\sqrt{3}}{13}, \qquad \frac{MJ}{CJ} = \frac{8}{5}\cdot\frac{d}{BH} - \frac{KJ}{CJ} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Пусть s есть сторона шестиугольника, u есть расстояние от M до ближайшего конца его стороны на MK. Две боковые вершины находятся на высоте $\sqrt{3}s/2$ и выступают за концы нижней стороны на $s/2$; верхняя сторона находится на высоте $\sqrt{3}s$.



красный



синий

Для красного условия на Y, W:

$$u \ge \frac{3}{2}s,$$
$$u + \frac{3}{2}s \le d + \frac{9}{26}s.$$

Для синего условия на Z, W:

$$u - \frac{1}{2}s \ge \frac{3}{10}s,$$
$$u + \frac{3}{2}s \le d - \frac{9}{26}s.$$

Остальные вершины дают более слабые ограничения. Отсюда $s_{\text{кр}} \le 26d/69$, $s_{\text{син}} \le 65d/172$. Обе оценки достигаются: при $u = 3s/2$ красный касается сторон вершинами Y, W, при $u = 4s/5$ синий касается сторон вершинами Z, W. Таким образом,

$$\frac{s_{\text{син}}}{s_{\text{кр}}} = \frac{65\cdot 69}{172\cdot 26} = \frac{345}{344} > 1.$$

Синий шестиугольник имеет большую сторону, а значит, и большую площадь.

Критерии оценивания (максимум 17 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Из подобия и прямоугольных треугольников найдены необходимые отношения высот и отрезков.	3
Доказана оценка стороны красного шестиугольника $s \le 26MK/69$ и её достижимость.	6
Доказана оценка стороны синего шестиугольника $s \le 65MK/172$ и её достижимость.	6
Точно сравнены стороны и сделан вывод о площадях.	2

2 (10 баллов). *Выбраны восемь различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Оказалось, что число*

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}}}$$

целое. Каким наименьшим может быть самое большое из выбранных чисел?

(Кенжегали Нурас)

Ответ: 24.

Решение. Произведение восьми выбранных чисел должно быть восьмой степенью, поэтому показатель каждого простого множителя в нём кратен восьми.

Предположим, что все числа меньше 24. Для любого простого $p \geq 5$ даже в произведении всех чисел от 1 до 23 показатель p меньше восьми: для 5 он равен 4, для 7 он равен 3, для 11 равен 2, для остальных не больше 1. Значит, ни одно выбранное число не делится на простое $p \geq 5$. Остаются только

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18.$$

В произведении всего этого списка показатель тройки равен $1+1+2+1+2 = 7$. В выбранном произведении он кратен восьми, следовательно, равен нулю. Тогда остаются лишь $1, 2, 4, 8, 16$, всего пять чисел вместо восьми. Противоречие.

При максимуме 24 подходит набор

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24, \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 = 2^8 \cdot 3^8 = 6^8.$$

Его восьмой корень равен 6, что доказывает достижимость ответа.

Критерии оценивания (максимум 10 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Установлено, что произведение является восьмой степенью.	1
При максимуме не больше 23 исключены простые делители $p \geq 5$ и приведён список кандидатов.	3
Исключены кратные 3 и доказана невозможность выбрать восемь различных чисел.	4
Приведён подходящий набор с максимумом 24 и проверено его произведение.	2

3 (4 балла). *$\overline{КРУГ}$ является круглым числом. Докажите, что $\overline{УГОЛ}$ круглым числом являться не может.*

(Предложена учеником 7 класса)

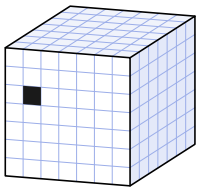
Ответ: Не может.

Решение. Круглое число оканчивается нулём. Поэтому Г $= 0$. Разным буквам соответствуют разные цифры, значит, Л $\neq 0$. Следовательно, число $\overline{\text{УГОЛ}}$ не оканчивается нулём и круглым не является.

Критерии оценивания (максимум 4 балла).

Содержание решения	**Баллы**
Из круглости $\overline{\text{КРУГ}}$ выведено Г $= 0$.	2
Получено Л $\neq 0$ и сделан вывод о числе $\overline{\text{УГОЛ}}$.	2

4 (18 баллов). *Каждая грань куба разбита на* 2027×2027 *одинаковых квадратных клеток. В начальный момент одну клетку закрасили чёрным. Через каждую минуту одновременно закрашиваются все белые клетки, имеющие общую сторону хотя бы с одной чёрной. Соседство через рёбра куба тоже учитывается.*
Найдите все возможные значения времени полного закрашивания поверхности куба (в минутах).



Разбиение показано схематически.

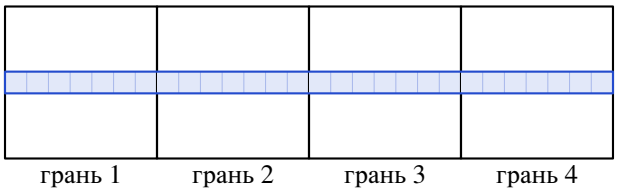
(Иван Ященко + дополнение)

Ответ: Все целые значения от 4054 до 6080 включительно.

Решение. Пусть на каждом ребре $n = 2027$ клеток, а сторона одной клетки равна 1. Расстоянием между клетками назовём наименьшее число переходов через общие стороны. Через t минут закрашены в точности клетки на расстоянии не больше t от начальной. Значит, время $T(S)$ полного закрашивания из клетки S равно наибольшему расстоянию от неё до клеток поверхности.

Рассмотрим клеточный пояс вокруг куба: на каждой из четырёх граней он занимает одну полосу ширины 1. Пояс образует цикл из $4n$ клеток, поэтому между любыми двумя его клетками можно пройти не больше чем за $2n$ переходов. Для двух клеток на разных гранях выберем пояс, содержащий первую клетку и пересекающий грань второй. На этой грани найдётся клетка пояса в одном ряду со второй, до которой не больше $n - 1$ переходов. Следовательно, расстояние между ними не больше $2n + (n - 1) = 3n - 1$. На одной грани достаточно $2n - 2$ переходов. Итак, всегда $T(S) \le 3n - 1$.

пояс из $4n$ клеток; крайние стороны склеены



Покажем, что из любой клетки нужно хотя бы $2n$ минут. Пусть клетка S' симметрична S относительно центра куба. Считаем грань с S нижней, а противоположную называем верхней. Соединим центры клеток произвольным клеточным путём. При переходе внутри грани центр смещается на 1 в одном из направлений рёбер, а при переходе через ребро на $1/2$ в двух таких направлениях. Поэтому сумма длин проекций одного перехода на любые два перпендикулярных направления рёбер не больше 1.

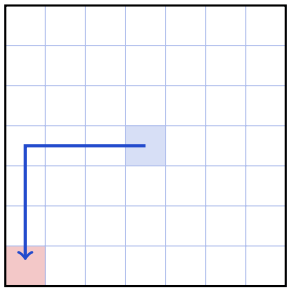
Путь из нижней грани в верхнюю обязательно попадает на какую-нибудь боковую грань. Пусть расстояние от центра S до плоскости этой грани равно a. Из центральной симметрии расстояние от центра S' до той же плоскости равно $n - a$. Пока путь достигает этой плоскости, а затем приходит в S', он в перпендикулярном к ней направлении проходит в сумме не меньше $a + (n - a) = n$. Одновременно суммарное перемещение по высоте не меньше n. На эти два перемещения нужно не меньше $2n$ переходов. Значит, $T(S) \ge 2n$.

Если начальная клетка угловая, выберем на противоположной грани угловую клетку при противоположной вершине куба. Между их центрами необходимо продвинуться на n по высоте и на $n-1$ в каждом из двух направлений горизонтальных рёбер. Суммарно это $3n-2$. Путь такой длины мог бы только продвигаться к цели, не возвращаясь ни в одном направлении. Но, выходя на боковую грань, он обязан достичь её плоскости, которая по одному из горизонтальных направлений лежит на полклетки за начальным или конечным центром. Поэтому возвращение неизбежно, и равенство $3n-2$ невозможно. Поскольку число переходов целое, их не меньше $3n-1$. Вместе с общей верхней оценкой это даёт $T(S)=3n-1$.

Теперь начнём с центральной клетки грани; она существует, поскольку n нечётно. На той же грани достаточно $n-1$ переходов, на соседней не больше $2n-1$: после развёртывания двух граней поперечное перемещение не больше $n/2+(n-1/2)$, а продольное не больше $(n-1)/2$.

Для клетки Q на противоположной грани обозначим через a,b расстояния в клетках до двух средних линий этой грани, параллельных её сторонам. Если пройти к этой грани по поясу в первом направлении, то до клетки пояса в одном ряду с Q потребуется $2n-a$ переходов: отклонение от центральной клетки на a сокращает один из двух полупоясов именно на a. Остаётся пройти b клеток. Получаем оценку $2n-a+b$. Пояс в перпендикулярном направлении даёт оценку $2n-b+a$. Меньшая из них равна $2n-|a-b|\le 2n$. Значит, из центральной клетки вся поверхность закрашивается за $2n$ минут.

Осталось доказать, что между найденными крайними значениями нет пропусков. При переносе начальной клетки в соседнюю расстояние до любой фиксированной клетки меняется не больше чем на 1. Значит, и наибольшее из этих расстояний меняется не больше чем на 1. Пройдём по одной грани от центральной клетки до угловой. В начале время равно $2n$, в конце равно $3n-1$, поэтому по дороге встретятся все целые значения между ними.



центр: $T=2n$

угол: $T=3n-1$

соседние старты: разница не больше 1

Итак, при $n=2027$ получаем все целые числа от $2\cdot 2027=4054$ до $3\cdot 2027-1=6080$.

Критерии оценивания (максимум 18 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Время закрашивания связано с наибольшим расстоянием по клеткам.	1
Для любого старта доказана верхняя оценка $3n-1$.	4
Для любого старта доказана нижняя оценка $2n$.	5
Доказана достижимость $2n$ в центральной клетке и $3n-1$ в угловой.	5
Доказано отсутствие пропусков и получен ответ при $n=2027$.	3

5 (8 баллов). *Дорога длиной 20 км начинается в пункте A и заканчивается в пункте B. Первые 10 км покрыты асфальтом, оставшиеся 10 км составляют грунтовую дорогу. Петя и Вася одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B. По асфальту Петя идёт со скоростью 6 км/ч, Вася идёт со скоростью 4 км/ч, а на грунтовой дороге скорости обоих уменьшаются в одно и то же неизвестное число раз, большее единицы. Они встретились в 3 км от начала грунтового участка.*

После этого решили заасфальтировать часть грунтовой дороги, начиная от конца старого асфальта. В следующий раз Петя и Вася могут отправиться одновременно из противоположных концов дороги, причём заранее неизвестно, кто выйдет из A, а кто из B. Какую наименьшую длину грунтовой дороги необходимо заасфальтировать, чтобы независимо от распределения пунктов отправления встреча происходила на асфальте?

(Таган Адилет)

Ответ: $\dfrac{10}{3}$ км.

Решение. Пусть на грунте скорости уменьшаются в k раз. До первой встречи Петя прошёл 10 км по асфальту и 3 км по грунту, Вася прошёл 7 км по грунту. Времена движения равны, поэтому

$$\frac{10+3k}{6}=\frac{7k}{4},\qquad 20+6k=21k,\qquad k=\frac{4}{3}.$$

Заменим каждый километр оставшегося грунта условным асфальтовым участком длины $4/3$ км. Время прохождения дороги каждым участником при этом сохранится, а отношение скоростей на всей условной дороге будет постоянным и равным $6:4=3:2$.

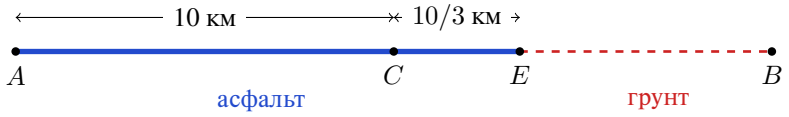
Пусть заасфальтировали ещё x км. Настоящий асфальт имеет длину $10+x$, оставшийся грунт имеет длину $10-x$, а вся условная дорога имеет длину

$$L=10+x+\frac{4}{3}(10-x)=\frac{70-x}{3}.$$

Если из A выходит Петя, он до встречи проходит $3/5$ условной дороги; если Вася, то $2/5$. Поэтому более далёкое от A место встречи получается в первом случае. Обе встречи лежат на асфальте тогда и только тогда, когда

$$\frac{3}{5}L\le 10+x\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{70-x}{5}\le 10+x\quad\Longleftrightarrow\quad x\ge\frac{10}{3}.$$

При $x=10/3$ Петя из A и Вася из B встретятся точно на новой границе асфальта, а при обратном распределении встреча произойдёт раньше этой границы. При любом меньшем x в первом распределении встреча окажется на грунте. Значит, найденная длина необходима и достаточна.



Критерии оценивания (максимум 8 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Из первой встречи составлено верное уравнение и найдено $k=4/3$.	2
Обоснована замена грунта условным асфальтом и найдена длина новой условной дороги.	2
Рассмотрены оба распределения стартов и получено $x\ge 10/3$.	2
Доказаны достаточность $x=10/3$ и невозможность меньшего значения.	2

6 (15 баллов). *На доске написаны два выражения:*

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 \qquad \textit{и} \qquad 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1.$$

В первом выражении расставили скобки произвольным образом, не изменяя порядок чисел и знаков. Во втором выражении расставили скобки точно по той же схеме. Оказалось, что значения обоих выражений являются различными натуральными числами. Какое наибольшее значение может иметь меньшее из этих двух чисел?

(Сондер Таерин)

Ответ: 140.

Решение. При раскрытии скобок каждое число попадает либо в числитель, либо в знаменатель. Одинаковая схема скобок задаёт одинаковое распределение *позиций* между числителем и знаменателем в обоих выражениях.

Первая позиция всегда в числителе, вторая в знаменателе. Это следует индукцией: в выражении $U : V$ позиции из U сохраняют положение, из V меняют его; второе число либо принадлежит U, либо начинает V при одночленной левой части.

В первом выражении число 7 не может попасть в знаменатель: больше ни один множитель не делится на 7, и значение не было бы целым. Так же число 5 обязано быть в числителе. Во втором выражении 5 стоит на третьей позиции, поэтому и третья позиция должна находиться в числителе. Итак, первая, третья, пятая и седьмая позиции находятся в числителе, вторая в знаменателе.

Четвёртая позиция тоже обязана быть в числителе. Иначе в первом выражении знаменатель содержит $2 \cdot 4 = 8$, тогда как среди оставшихся чисел только 6 даёт один множитель 2; сократить все двойки невозможно.

Осталось решить, куда попадает шестая позиция. Если в знаменатель, значения равны

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 6} = 35, \qquad \frac{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 2} = 35,$$

что запрещено условием. Значит, шестая позиция находится в числителе, и значения равны

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 1260, \qquad \frac{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 140.$$

Такая общая схема скобок действительно существует:

$$1 : (((((2 : 3) : 4) : 5) : 6) : 7) = 1260,$$
$$7 : (((((6 : 5) : 4) : 3) : 2) : 1) = 140.$$

Следовательно, меньшее из двух различных натуральных значений равно 140, и эта величина достигается.

Критерии оценивания (максимум 15 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Обосновано общее распределение позиций между числителем и знаменателем и положение первых двух чисел.	2
Через простые 5 и 7 установлено, что третья, пятая и седьмая позиции в числителе.	4
По делимости на 2 доказано, что четвёртая позиция в числителе.	3
Рассмотрены две возможности для шестой позиции, исключена пара $(35, 35)$.	3
Приведена одна схема скобок для пары $(1260, 140)$ и получен ответ.	3