

БІРІНШІ MANUS БЕТА ТУРНИРІ
ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДЕРІ

9-10 СЫНЫПТАР

Төменде берілген есептерді олардың авторларын көрсетпей пайдалануға тыйым салынады.

1 (2 ұпай). *$\overline{КРУГ}$ саны дөңгелек сан. $\overline{УГОЛ}$ санының дөңгелек сан бола алмайтынын дәлелдеңіз.*

(7-сынып оқушысы ұсынған)

Жауабы: Бола алмайды.

Шешуі. $\overline{\text{КРУГ}}$ саны дөңгелек болғандықтан, $\text{Г} = 0$. Әртүрлі әріптерге әртүрлі цифрлар сәйкес келеді, сондықтан $\text{Л} \neq 0$. Демек, $\overline{\text{УГОЛ}}$ саны нөлмен аяқталмайды.

Бағалау критерийлері (ең көбі 2 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
$\text{Г} = 0$ екені алынған.	1
$\text{Л} \neq \text{Г}$ шартынан $\overline{\text{УГОЛ}}$ саны туралы қорытынды жасалған.	1

2 (8 ұпай). *Әрбір оң нақты x саны үшін шексіз тізбек құрылады: $f_1(x) = \{x\}$, ал барлық бүтін $n \geq 1$ үшін $f_{n+1}(x) = \{x \cdot f_n(x)\}$ (мұндағы $\{t\}$ белгісі t санының бөлшек бөлігін білдіреді).*

а) (5 ұпай) Барлық $n \geq 1$ үшін $f_n(x)$ тізбегі монотонды кемитін, бірақ ешбір мүшесі нөлге тең болмайтын иррационал $x > 1$ саны бар ма?

б) (3 ұпай) Қандай да бір нақты $x > 1$ үшін $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ сандары қатаң кемімелі геометриялық прогрессия құрап, сонымен бірге $f_4(x) > f_1(x)$ теңсіздігі орындалуы мүмкін бе?

(Сондер Таерин)

Жауабы: а) Жоқ. б) Иә, мысалы, $x = 9/2$ болғанда.

Шешуі. а) тармағында $a_n = f_n(x) > a_{n+1} > 0$ болсын деп ұйғарайық. Бүтін $k_n = \lfloor xa_n \rfloor$ сандары өспейді және теріс емес, сондықтан белгілі бір нөмірден бастап тұрақты болады. Онда

$$a_{n+1} = xa_n - k, \qquad a_{n+1} - a_{n+2} = x(a_n - a_{n+1}).$$

Көршілес мүшелердің оң айырмалары әр қадамда $x > 1$ есе артып, ақырында 1-ден асады. Бұл мүмкін емес, өйткені барлық a_n саны $(0, 1)$ аралығында жатыр. Демек, мұндай x тіпті барлық нақты сандардың арасында да жоқ.

б) тармағында $x = 9/2$ деп алу жеткілікті. Тікелей есептесек,

$$f_1 = \frac{1}{2}, \qquad f_2 = \frac{1}{4}, \qquad f_3 = \frac{1}{8}, \qquad f_4 = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}.$$

Алғашқы үш мүше еселігі $1/2$ болатын қажетті прогрессияны құрайды.

Бағалау критерийлері (ең көбі 8 ұпай).

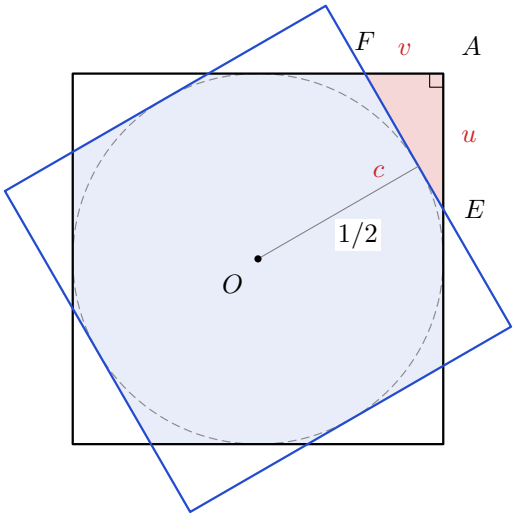
Шешім мазмұны	**Ұпай**
а) $\lfloor xf_n(x) \rfloor$ бүтін бөліктерінің белгілі бір нөмірден бастап тұрақты болатыны дәлелденген.	2
а) Оң айырмалардың өсуі арқылы қайшылық алынған.	3
б) x-тің жарамды мәні таңдалған.	1
б) Алғашқы үш мүше дұрыс табылып, кемімелі геометриялық прогрессия екені тексерілген.	1
б) $f_4(x) > f_1(x)$ теңсіздігі тексерілген.	1

3 (10 ұпай). *Әрқайсысының ауданы 1-ге тең екі бірдей шаршы қағаз парағы центрлері беттесетіндей етіп бірінің үстіне бірі қойылған. Содан кейін бір парақ ортақ центрді айнала кез келген бұрышқа бұрылған. Екі шаршының ортақ бөлігінің мүмкін болатын ең кіші ауданын табыңыз.*

(Отар Ерназар)

Жауабы: $2\sqrt{2}-2$.

Шешуі. Екі шаршы да радиусы $1/2$ болатын бір шеңберге сырттай сызылған. Симметрия бойынша бұрылу бұрышын 0°-тан 45°-қа дейін қарастыру жеткілікті. Нөлден өзге бұрышқа бұрғанда бірінші шаршыдан өзара тең төрт тікбұрышты үшбұрыш қиылып қалады.



Осы үшбұрыштардың бірінің катеттері u, v, гипотенузасы c болсын. Оның үш қабырғасын қамтитын түзулер ортақ шеңберге жанасады. Гипотенуза ұштарынан жүргізілген жанамалардың теңдігінен

$$c = \left(\frac{1}{2}-u\right)+\left(\frac{1}{2}-v\right), \qquad u+v+c=1.$$

$p = u+v$ деп белгілейік. Пифагор теоремасы бойынша

$$c^2 = u^2+v^2 \geq \frac{(u+v)^2}{2} = \frac{p^2}{2}, \qquad 1-p = c \geq \frac{p}{\sqrt{2}},$$

бұдан $p \leq 2-\sqrt{2}$. Үшбұрыштың ауданы

$$\frac{uv}{2} = \frac{p^2-c^2}{4} = \frac{p^2-(1-p)^2}{4} = \frac{2p-1}{4} \leq \frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Сондықтан ортақ бөліктің ауданы кемінде

$$1-4\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}-2.$$

Теңдік $u=v$ болғанда, яғни 45°-қа бұрғанда орындалады. Бұрылу бұрышы нөл болса, ортақ бөліктің ауданы 1-ге тең, бұл табылған минимумды өзгертпейді.

Бағалау критерийлері (ең көбі 10 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Өзара тең төрт тікбұрышты үшбұрыш пен ортақ іштей сызылған шеңбер анықталған.	2
Жанамалар арқылы $u+v+c=1$ теңдігі дәлелденген.	3
Қиылып қалатын үшбұрыш ауданының жоғарғы бағалауы дәлелденген.	3
$2\sqrt{2}-2$ минимумы табылып, оның 45°-та алынатыны дәлелденген.	2

4 (18 ұпай). *Кубқа оның барлық алты жағына жанасатын шар іштей сызылған. Кубты жұп-жұбымен перпендикуляр үш жазықтықпен қиған. Әр жазықтық кубтың барлық алты жағын қиып, алынған үш қиманың әрқайсысы алтыбұрыш болған. Үш жазықтықтың ортақ нүктесін P деп белгілейік. Жазықтықтарды P нүктесі кубтың ішкі бөлігінде және іштей сызылған шардың сыртында жататындай етіп орналастыруға бола ма? (Жазықтықтардың ешқайсысы куб центрі арқылы өтуге міндетті емес; алтыбұрыштар кез келген түрде болуы мүмкін, олардың дұрыс болуы міндетті емес.)*

(Кенжегали Нурас)

Жауабы: Жоқ.

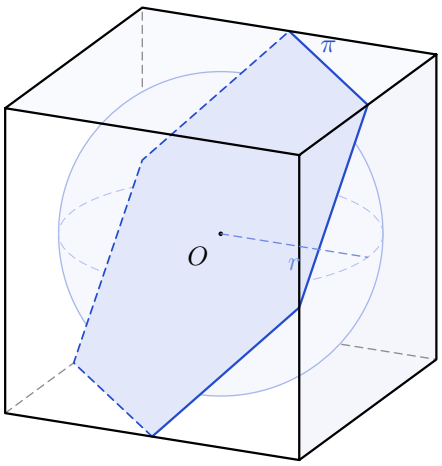
Шешуі. Кубтың центрін O, шардың радиусын r деп белгілейік; куб қыры $2r$-ге тең. Қимасы алтыбұрыш болатын кез келген π жазықтығы үшін O-дан осы жазықтыққа дейінгі қашықтық $r/\sqrt{3}$-тен кіші екенін дәлелдейік.

Нормальдың оң бағытында π-ден ең алыс жатқан V төбесін таңдайық. V-ны қамтымайтын үш жақтың әрқайсысында осы бағытта ең алыс төбе V-мен қыр арқылы көршілес болады. π осы жақтардың әрқайсысының ішкі бөлігін қиғандықтан, V-ның үш көршісі де V-мен бірге π-дің бір жағында жатады. Дәл сол сияқты қарама-қарсы V' төбесі мен оның үш көршісі екінші жақта жатады.

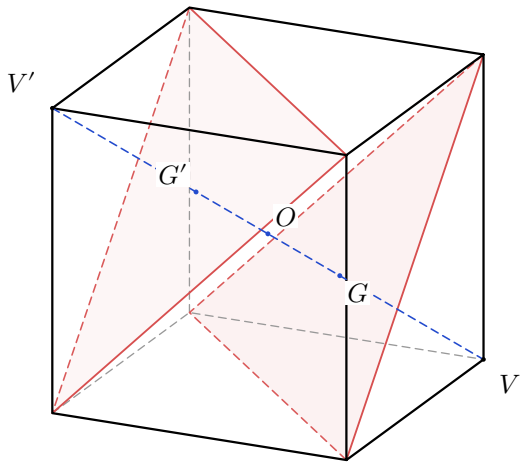
V-ның үш көршісінен және V'-тің үш көршісінен құралған теңқабырғалы үшбұрыштардың центрлерін G, G' деп белгілейік. Олар VV' диагоналінде жатады, әрі

$$VG = V'G' = \frac{1}{3}VV', \qquad OG = OG' = \frac{1}{6}VV' = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

π жазықтығы осы үшбұрыштарды бөліп тұрады, сондықтан GG' кесіндісінің ішкі нүктесі арқылы өтеді. Демек, O-дан π-ге дейінгі қашықтық $r/\sqrt{3}$-тен кіші.



Алтыбұрышты қима және іштей сызылған шар



Центрлері G, G' болатын үшбұрыштар

O-дан үш жазықтыққа дейінгі қашықтықтарды d_1, d_2, d_3 деп белгілейік. Жазықтықтар жұп-жұбымен перпендикуляр болғандықтан, тікбұрышты параллелепипед үшін Пифагор теоремасы бойынша

$$OP^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 < 3\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = r^2.$$

Демек, P нүктесі міндетті түрде іштей сызылған шардың ішінде жатады.

Бағалау критерийлері (ең көбі 18 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Алтыбұрышты қима жазықтығы қарама-қарсы төбелердің үш-үштен көршілерін бөліп тұратыны дәлелденген.	5
Үшбұрыш центрлері арқылы жазықтыққа дейінгі қашықтық үшін $d < r/\sqrt{3}$ бағалауы алынған.	6
Үш перпендикуляр жазықтық үшін $OP^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ теңдігі негізделген.	5
$OP < r$ алынып, қорытынды жасалған.	2

5 (17 ұпай). *Центрі O болатын ω шеңберіне дөңес $ABCD$ төртбұрышы іштей сызылған. AB және CD түзулері X нүктесінде, AD және BC түзулері Y нүктесінде, ал AC және BD диагональдары Z нүктесінде қиылысады. OX түзуі YZ түзуімен H нүктесінде, ал OY түзуі XZ түзуімен K нүктесінде қиылысады. X, Y, H, K нүктелерінің бір шеңбер бойында жататынын дәлелдеңіз.*

(Кенжегали Нурас)

Жауабы: Диаметрі XY болатын шеңбер.

Шешуі. $OX \perp YZ$ және $OY \perp XZ$ екенін дәлелдейік.

$T = YZ \cap AB$, $U = YZ \cap CD$ болсын. AC, BD, YT түзулері Z арқылы өтеді. Сондықтан YAB үшбұрышына Чева теоремасын және DCX қиюшысына Менелай теоремасын қолдансақ, сәйкесінше

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BC}{CY} \cdot \frac{YD}{DA} = 1, \qquad \frac{XA}{XB} \cdot \frac{BC}{CY} \cdot \frac{YD}{DA} = 1.$$

Мұнда T нүктесі A мен B арасында жатады: C, D нүктелерінің екеуі де не YB, YA қабырғаларында, не олардың созындыларында жатады. Сондықтан

$$\frac{AT}{TB} = \frac{XA}{XB}.$$

X нүктесі ω-ның сыртында, сондықтан A, B нүктелері X-тен шығатын бір сәуледе жатады. $XA = a, XB = b$ деп алайық; қажет болса, $a < b$ болатындай A, B атауларын ауыстырамыз. Онда $AT = XT - a, TB = b - XT$, бұдан

$$\frac{XT - a}{b - XT} = \frac{a}{b}, \qquad XT = \frac{2ab}{a + b}.$$

M нүктесі AB-ның ортасы болса, $XM = (a + b)/2$. Сондықтан

$$XM \cdot XT = XA \cdot XB = p,$$

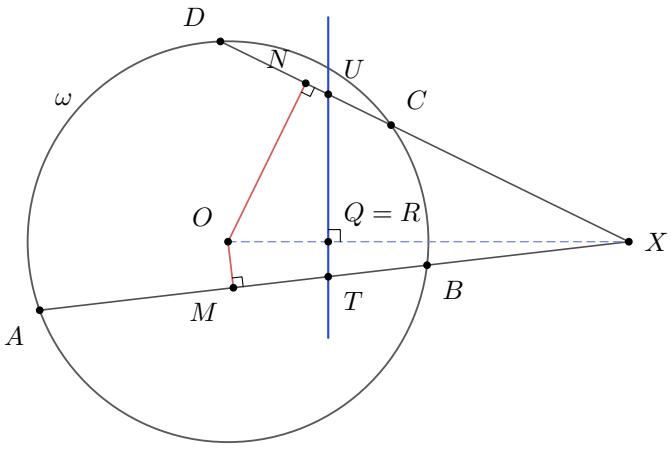
мұндағы p шамасы X нүктесінің ω шеңберіне қатысты дәрежесі. U нүктесі мен CD хордасының ортасы N үшін YCD үшбұрышындағы дәл осындай пайымдаудан

$$\frac{CU}{UD} = \frac{XC}{XD}, \qquad XN \cdot XU = XC \cdot XD = p.$$

T, U нүктелерінен XO түзуіне түсірілген перпендикулярлардың табандарын Q, R деп белгілейік. Хордалардың орталарына жүргізілген радиустар хордаларға перпендикуляр. Тікбұрышты XQT, XMO және XRU, XNO үшбұрыштарының ұқсастығынан

$$XQ \cdot XO = XM \cdot XT = p, \qquad XR \cdot XO = XN \cdot XU = p.$$

Егер $M = O$ немесе $N = O$ болса, тиісті теңдік нүктелердің бір түзуде жатуынан бірден шығады. MXO, NXO бұрыштары 90°-тан кіші болғандықтан, екі табан да XO сәулесінде жатады. Сонымен, $XQ = XR = p/XO$, яғни $Q = R$. $T \neq U$ болғандықтан, $TU = YZ$ түзуі OX-ке перпендикуляр.

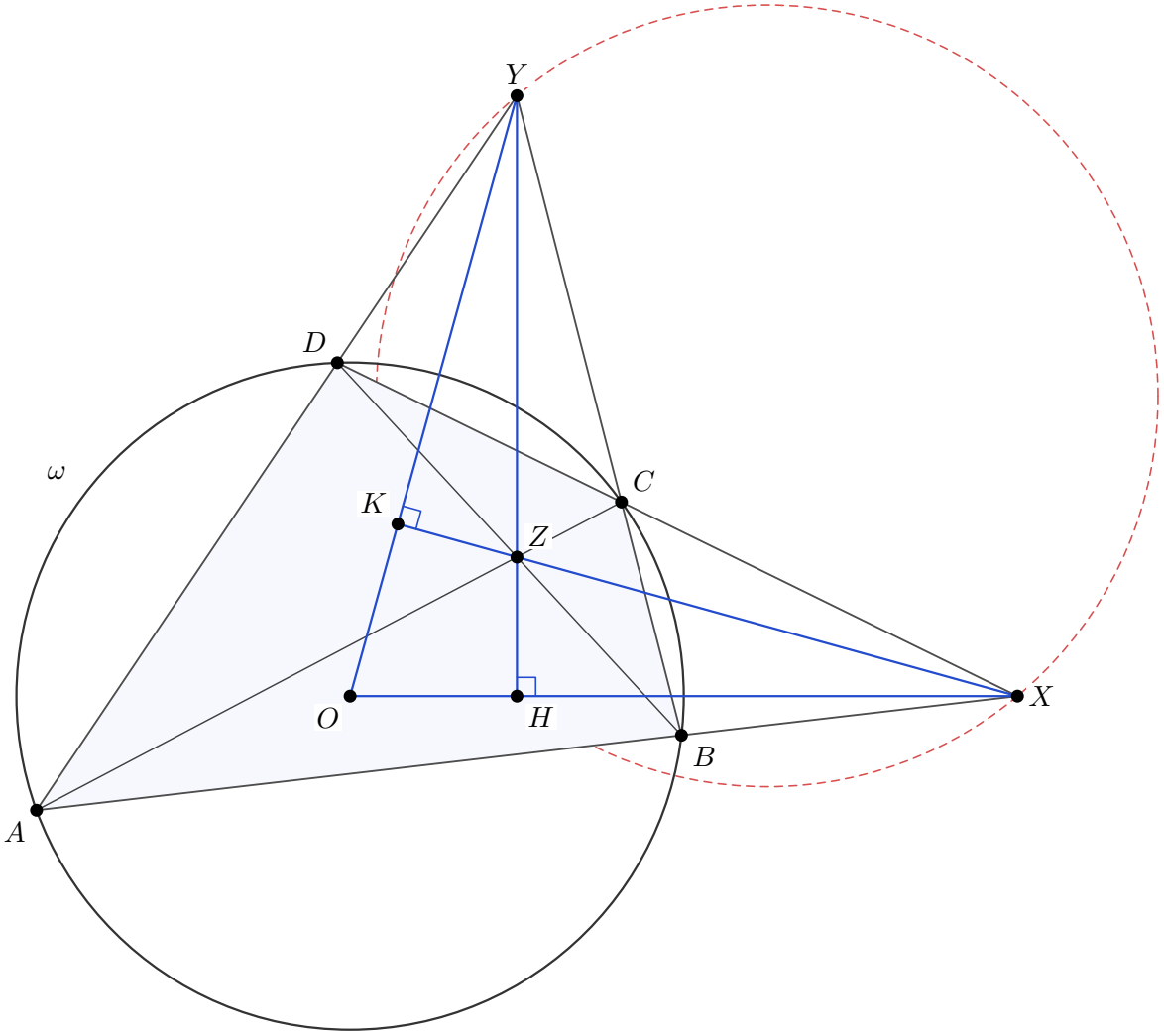


Екінші перпендикулярлықты алу қалды. Дәлелденген пайымдауда B мен D атауларын ауыстырайық. Онда X, Y орын ауыстырады, ал Z өзгермейді. $S = XZ \cap AD$, $W = XZ \cap BC$ болсын, ал L, J нүктелері AD, BC кесінділерінің орталары болсын. Сонда

$$YL \cdot YS = YA \cdot YD = YB \cdot YC = YJ \cdot YW.$$

Дәлелденген ұқсастық бойынша S, W нүктелерінің YO сәулесіне проекциялары беттеседі. Сондықтан $SW = XZ \perp OY$.

Енді $\angle XHY = \angle XKY = 90°$. Демек, H және K диаметрі XY болатын шеңбер бойында жатады.



Бағалау критерийлері (ең көбі 17 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Чева және Менелай теоремалары арқылы $AT/TB = XA/XB$ теңдігі алынған.	3
Нүктенің дәрежесі және проекциялардың беттесуі арқылы $OX \perp YZ$ дәлелденген.	5
Екінші жұп қиюшыға осы дәлел қолданылып, $OY \perp XZ$ алынған.	5
Екі тік бұрыш алынып, диаметрі XY болатын ортақ шеңбер табылған.	4

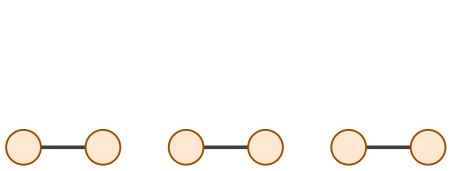
6 (15 ұпай). *Үстелде $n \geq 3$ бөлек дөңгелек прәндік жатыр. Екі кондитер кезектесіп, бастапқы прәндіктердің кез келген екеуін жіңішке қамыр жолағымен қосады. Жолақтарды июге болады, бірақ олар бір-бірін қимауы, өзімен-өзі тұйықталмауы және өзге прәндіктерге тимеуі тиіс. Әр прәндік жұбының арасында тек бір жолаққа рұқсат етіледі. Өз жүрісінен кейін алынған пішінде алғаш рет сақина пішінді тоқаштағыдай тұйық тесік пайда болған ойыншы жеңіледі. Екінші кондитер әдейі кедергі жасауға тырысса да, бірінші кондитер қандай n мәндерінде өзінің жеңілуін қамтамасыз ете алады?*

(Кенжегали Нурас, Наурузбеков Мадияр)

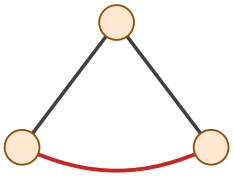
Жауабы: $n \equiv 2$ немесе $3 \pmod 4$ болғанда.

Шешуі. Прәндіктерді жазық графтың төбелерімен, ал жолақтарды қырларымен алмастырайық. Алғашқы тесік пайда болғанға дейін граф орман болады: қауіпсіз жүріс әртүрлі компоненталарды қосады, ал алғашқы цикл тесік тудырады.

Егер ағашта кемінде үш төбе болса, кезектегі ойыншы бірден жеңіле алады: көршілес емес екі төбені ағаш шекарасының жанымен өтетін жолақпен қосу жеткілікті. Бір не екі төбелі компоненталарда жеңілдіретін жүріс жоқ, өйткені ілмектер мен қайталама қырларға тыйым салынған.



Екі төбеден тұратын бөлек компоненталар



Тесік тудыратын жолақ

Сондықтан бірінші ойыншы әлі жеңілмеген кезде үш не одан көп төбелі ағаш жасамауы тиіс: әйтпесе екінші ойыншы циклді өзі тұйықтап, ойынды аяқтайды. Ал мұндай ағашты екінші ойыншы жасаса, бірінші ойыншы циклді бірден тұйықтап, мақсатына жетеді. Сондықтан мүмкіндік барда екеуі де әлі қосылмаған екі прәндікті жұптауға мәжбүр.

$m = \lfloor n/2 \rfloor$ болсын. Осындай m жүрістен кейін ең көбі бір жалғыз прәндік қалады. Келесі ойыншы бірден жеңіле алмайды және әртүрлі компоненталарды қосып, кемінде үш төбелі ағаш жасауға мәжбүр болады. Одан кейін қарсыласы циклді тұйықтап, жеңіледі.

Егер m тақ болса, бірінші ойыншы үнемі жалғыз прәндіктерді қосады. Не екінші ойыншы бұрынырақ кемінде үш төбелі ағаш жасап, біріншіге жеңілдіретін жүріс береді, не m-жүрістен кейін дәл екінші ойыншы осындай ағаш жасауға мәжбүр болады. Екі жағдайда да бірінші ойыншы өзінің жеңілуін қамтамасыз етеді.

Егер m жұп болса, осы стратегияны екінші ойыншы қолданады. Бірінші ойыншы одан ауытқыса, екіншісі бірден өзі жеңіле алады; ал ауытқымаса, m-жүрістен кейін кемінде үш төбелі ағашты бірінші ойыншы жасауға мәжбүр болады. Демек, бірінші ойыншы өзінің жеңілуін қамтамасыз ете алмайды.

Сонымен, қажетті әрі жеткілікті шарт: $\lfloor n/2 \rfloor$ тақ, яғни $n \equiv 2, 3 \pmod 4$.

Бағалау критерийлері (ең көбі 15 ұпай).

Шешім мазмұны	**Ұпай**
Жазық орман моделі және алғашқы циклдің тесікпен байланысы негізделген.	3
Жеңілдіретін жүріс дәл кемінде үш төбелі компонента барда болатыны дәлелденген.	4
$\lfloor n/2 \rfloor$ тақ болғанда бірінші, жұп болғанда екінші ойыншының стратегиясы құрылған.	5
Компоненталарды қосуға мәжбүр болатын сәт негізделіп, 4 модулі бойынша $2, 3$ қалдықтары алынған.	3