

РЕШЕНИЕ ПЕРВОГО БЕТА ТУРНИРА MANUS

9-10 КЛАССЫ

Использование приведённых ниже задач
без указания их авторов запрещено.

1 (2 балла). *$\overline{КРУГ}$ является круглым числом. Докажите, что $\overline{УГОЛ}$ круглым числом являться не может.*

(Предложена учеником 7 класса)

Ответ: Не может.

Решение. Из круглости $\overline{КРУГ}$ следует $Г = 0$. Разным буквам соответствуют разные цифры, поэтому $Л \neq 0$. Значит, $\overline{УГОЛ}$ не оканчивается нулём.

Критерии оценивания (максимум 2 балла).

Содержание решения	**Баллы**
Получено $Г = 0$.	1
Из $Л \neq Г$ сделан вывод о числе $\overline{УГОЛ}$.	1

2 (8 баллов). *Для каждого положительного действительного x строится бесконечная последовательность: $f_1(x) = \{x\}$, а $f_{n+1}(x) = \{x \cdot f_n(x)\}$ при всех целых $n \geq 1$ (где $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t).*

а) (5 баллов) Существует ли такое иррациональное число $x > 1$, для которого последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает при всех $n \geq 1$, но ни один её член не равен нулю?

б) (3 балла) Может ли для некоторого действительного $x > 1$ тройка чисел $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ образовать строго убывающую геометрическую прогрессию, если при этом выполнено неравенство $f_4(x) > f_1(x)$?

(Сондер Таерин)

Ответ: а) Нет. б) Да, например, при $x = 9/2$.

Решение. Предположим в пункте а), что $a_n = f_n(x) > a_{n+1} > 0$. Целые числа $k_n = \lfloor x a_n \rfloor$ не возрастают и неотрицательны, поэтому начиная с некоторого номера постоянны. Тогда

$$a_{n+1} = x a_n - k, \qquad a_{n+1} - a_{n+2} = x(a_n - a_{n+1}).$$

Положительные разности соседних членов растут в $x > 1$ раз и рано или поздно превышают 1. Это невозможно, поскольку все a_n лежат в $(0, 1)$. Значит, такого x не существует даже среди всех действительных чисел.

В пункте б) достаточно положить $x = 9/2$. Непосредственно получаем

$$f_1 = \frac{1}{2}, \qquad f_2 = \frac{1}{4}, \qquad f_3 = \frac{1}{8}, \qquad f_4 = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}.$$

Первые три члена образуют требуемую прогрессию со знаменателем $1/2$.

Критерии оценивания (максимум 8 баллов).

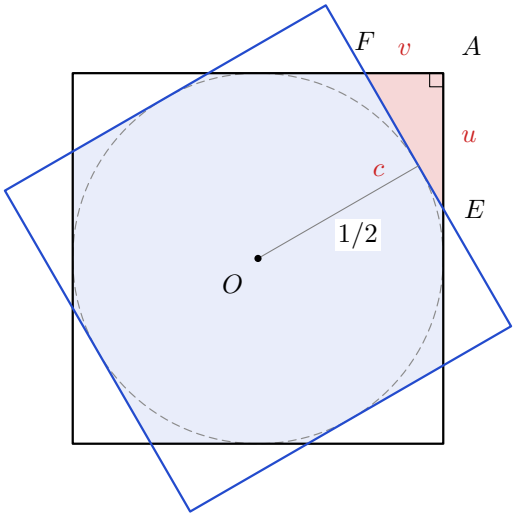
Содержание решения	**Баллы**
а) Доказана стабилизация целых частей $\lfloor x f_n(x) \rfloor$.	2
а) Через рост положительных разностей получено противоречие.	3
б) Выбрано подходящее значение x.	1
б) Верно найдены первые три члена и проверена убывающая геометрическая прогрессия.	1
б) Проверено $f_4(x) > f_1(x)$.	1

3 (10 баллов). *Два одинаковых квадратных листа бумаги площадью 1 каждый наложили друг на друга так, что их центры совпали. После этого один лист повернули вокруг общего центра на произвольный угол. Найдите наименьшую возможную площадь общей части двух квадратов.*

(Отар Ерназар)

Ответ: $2\sqrt{2}-2$.

Решение. Оба квадрата описаны около одной окружности радиуса $1/2$. По симметрии достаточно рассмотреть угол поворота от 0° до 45°. При ненулевом повороте из первого квадрата вырезаются четыре равных прямоугольных треугольника.



Пусть у одного из вырезанных треугольников катеты равны u, v, а гипотенуза равна c. Все три прямые его сторон касаются общей окружности. Равенство касательных из концов гипотенузы даёт

$$c = \left(\frac{1}{2}-u\right)+\left(\frac{1}{2}-v\right), \qquad u+v+c=1.$$

Положим $p=u+v$. По теореме Пифагора

$$c^2=u^2+v^2 \geq \frac{(u+v)^2}{2}=\frac{p^2}{2}, \qquad 1-p=c\geq \frac{p}{\sqrt{2}},$$

откуда $p \leq 2-\sqrt{2}$. Площадь треугольника равна

$$\frac{uv}{2}=\frac{p^2-c^2}{4}=\frac{p^2-(1-p)^2}{4}=\frac{2p-1}{4}\leq \frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Поэтому площадь пересечения не меньше

$$1-4\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}-2.$$

Равенство достигается при $u=v$, то есть при повороте на 45°. При нулевом повороте площадь пересечения равна 1, что не уменьшает найденный минимум.

Критерии оценивания (максимум 10 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Выделены четыре равных прямоугольных треугольника и общая вписанная окружность.	2
Через касательные доказано $u+v+c=1$.	3
Доказана верхняя оценка площади вырезанного треугольника.	3
Получен минимум $2\sqrt{2}-2$ и доказана достижимость при 45°.	2

4 (18 баллов). *В куб вписали шар, касающийся всех шести его граней. Затем куб пересекли тремя попарно перпендикулярными плоскостями. Каждая из них пересекла все шесть граней куба, причём все три полученных сечения оказались шестиугольниками. Обозначим через P общую точку этих трёх плоскостей. Можно ли расположить плоскости так, чтобы точка P находилась строго внутри куба, но вне вписанного в него шара? (Ни одна из плоскостей не обязана проходить через центр куба; шестиугольники могут быть произвольными, не обязательно правильными.)*

(Кенжегали Нурас)

Ответ: Нет.

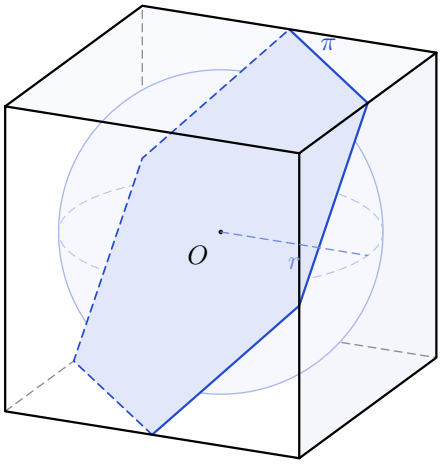
Решение. Пусть O есть центр куба, r есть радиус шара; ребро куба равно $2r$. Докажем, что любая плоскость π с шестиугольным сечением удалена от O менее чем на $r/\sqrt{3}$.

Выберем вершину V, наиболее удалённую от π в положительном направлении нормали. У каждой из трёх граней, не содержащих V, наиболее удалённая в этом направлении вершина является соседом V. Поскольку π пересекает внутренность каждой из этих граней, все три соседа V лежат с V по одну сторону от π. Аналогично противоположная вершина V' и три её соседа лежат по другую сторону.

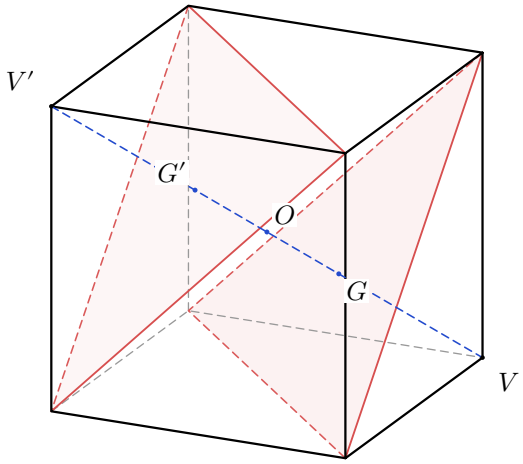
Пусть G, G' есть центры равносторонних треугольников из трёх соседей V и трёх соседей V'. Они лежат на диагонали VV', причём

$$VG = V'G' = \frac{1}{3}VV', \qquad OG = OG' = \frac{1}{6}VV' = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Плоскость π разделяет эти треугольники, поэтому пересекает отрезок GG' во внутренней точке. Следовательно, расстояние от O до π меньше $r/\sqrt{3}$.



Шестиугольное сечение и вписанный шар



Треугольники с центрами G и G'

Теперь обозначим расстояния от O до трёх плоскостей через d_1, d_2, d_3. Из их попарной перпендикулярности по теореме Пифагора для прямоугольного параллелепипеда

$$OP^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 < 3\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = r^2.$$

Значит, P обязательно находится внутри вписанного шара.

Критерии оценивания (максимум 18 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Доказано, что плоскость с шестиугольным сечением разделяет две тройки соседей противоположных вершин.	5
Через центры треугольников получена оценка расстояния до плоскости $d < r/\sqrt{3}$.	6
Обосновано $OP^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ для трёх перпендикулярных плоскостей.	5
Получено $OP < r$ и сделан вывод.	2

5 (17 баллов). *В окружность ω с центром O вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке X, прямые AD и BC пересекаются в точке Y, а диагонали AC и BD пересекаются в точке Z. Прямая OX пересекает прямую YZ в точке H, а прямая OY пересекает прямую XZ в точке K. Докажите, что точки X, Y, H, K лежат на одной окружности.*

(Кенжегали Нурас)

Ответ: Окружность с диаметром XY.

Решение. Докажем, что $OX \perp YZ$ и $OY \perp XZ$.

Пусть $T = YZ \cap AB$, $U = YZ \cap CD$. Прямые AC, BD, YT проходят через Z. Поэтому по теореме Чевы в треугольнике YAB и по теореме Менелая для секущей DCX соответственно

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BC}{CY} \cdot \frac{YD}{DA} = 1, \qquad \frac{XA}{XB} \cdot \frac{BC}{CY} \cdot \frac{YD}{DA} = 1.$$

Здесь T лежит между A, B: точки C, D либо обе лежат на сторонах YB, YA, либо обе на их продолжениях. Следовательно,

$$\frac{AT}{TB} = \frac{XA}{XB}.$$

Точка X находится вне ω, так что A, B лежат на одном луче из X. Положим $XA = a$, $XB = b$; при необходимости поменяем A, B местами, чтобы $a < b$. Тогда $AT = XT - a$, $TB = b - XT$, откуда

$$\frac{XT - a}{b - XT} = \frac{a}{b}, \qquad XT = \frac{2ab}{a + b}.$$

Если M есть середина AB, то $XM = (a + b)/2$. Поэтому

$$XM \cdot XT = XA \cdot XB = p,$$

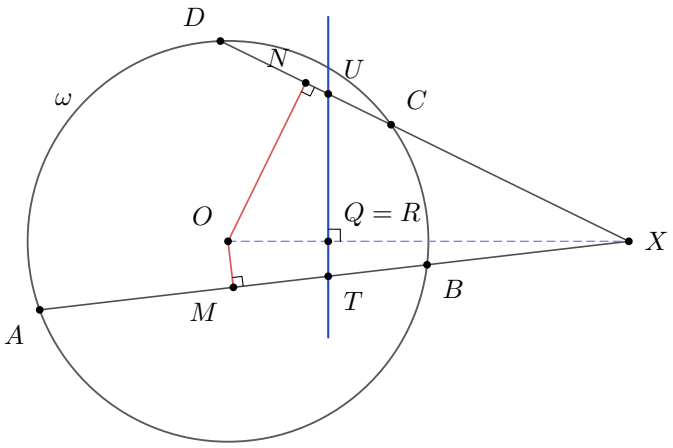
где p есть степень точки X относительно ω. Для U и середины N хорды CD то же рассуждение в треугольнике YCD даёт

$$\frac{CU}{UD} = \frac{XC}{XD}, \qquad XN \cdot XU = XC \cdot XD = p.$$

Пусть Q, R есть основания перпендикуляров из T, U на XO. Радиусы к серединам хорд перпендикулярны хордам. Из подобия прямоугольных треугольников XQT, XMO и XRU, XNO получаем

$$XQ \cdot XO = XM \cdot XT = p, \qquad XR \cdot XO = XN \cdot XU = p.$$

Если $M = O$ или $N = O$, соответствующее равенство следует непосредственно из коллинеарности точек. Оба основания лежат на луче XO, поскольку углы MXO, NXO меньше $90°$. Итак, $XQ = XR = p/XO$, то есть $Q = R$. Так как $T \neq U$, прямая $TU = YZ$ перпендикулярна OX.

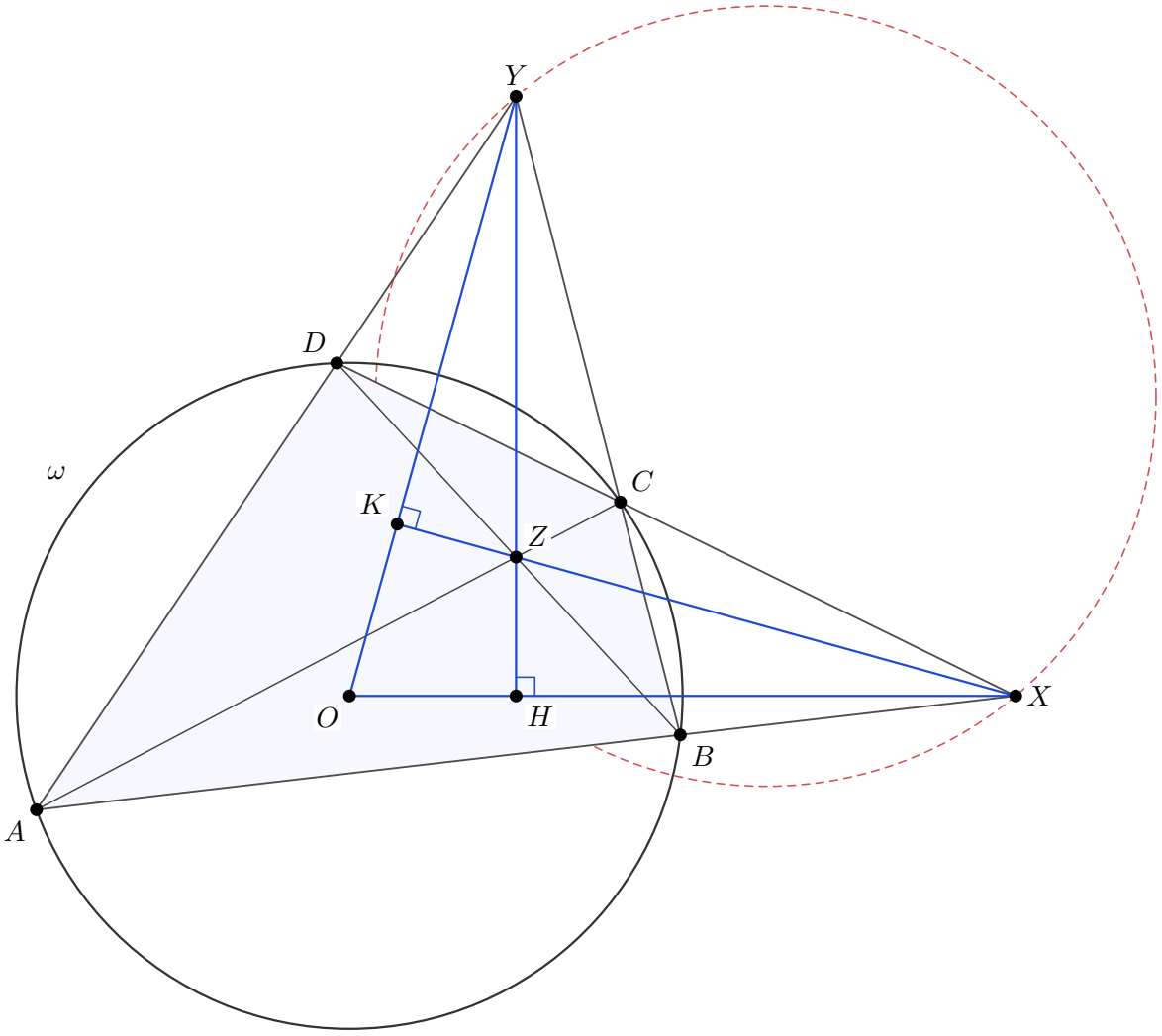


Осталось получить вторую перпендикулярность. Поменяем в доказанном рассуждении B и D местами. Тогда X, Y меняются ролями, а Z остаётся той же точкой. Если $S = XZ \cap AD$, $W = XZ \cap BC$, а L, J есть середины AD, BC, то получаем

$$YL \cdot YS = YA \cdot YD = YB \cdot YC = YJ \cdot YW.$$

Проекции S, W на луч YO совпадают по тому же доказанному подобию. Поэтому $SW = XZ \perp OY$.

Теперь $\angle XHY = \angle XKY = 90^\circ$. Следовательно, H и K лежат на окружности с диаметром XY.



Критерии оценивания (максимум 17 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Теоремами Чевы и Менелая получено $AT/TB = XA/XB$.	3
Через степень точки и совпадение проекций доказано $OX \perp YZ$.	5
Тем же доказательством для второй пары секущих получено $OY \perp XZ$.	5
Получены два прямых угла и общая окружность с диаметром XY.	4

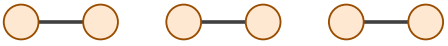
6 (15 баллов). *На столе лежат $n \geq 3$ отдельных круглых пряников. Два кондитера по очереди соединяют два исходных пряника тонкой перемычкой из теста. Перемычки можно изгибать, но нельзя пересекать между собой, замыкать сами на себя или касаться ими посторонних пряников. Между каждой парой пряников разрешена только одна перемычка. Проигрывает тот, после чьего хода в получившейся фигуре впервые появится замкнутое отверстие, как у бублика. При каких n первый кондитер может гарантировать себе проигрыш, даже если второй намеренно старается ему помешать?*

(Кенжегали Нурас, Наурузбеков Мадияр)

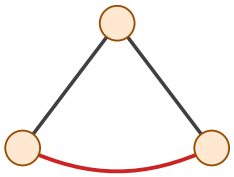
Ответ: При $n \equiv 2$ или $3 \pmod 4$.

Решение. Заменим пряники вершинами, перемычки рёбрами плоского графа. До первого отверстия граф является лесом: безопасный ход соединяет разные компоненты, а первый цикл создаёт отверстие.

Если в дереве есть хотя бы три вершины, очередной игрок может немедленно проиграть: достаточно соединить две несмежные вершины, проведя перемычку рядом с границей дерева. В компонентах из одной или двух вершин проигрывающего хода нет, поскольку петли и повторные рёбра запрещены.



Отдельные компоненты из двух вершин



Перемычка, создающая отверстие

Поэтому, пока первый ещё не проиграл, ему нельзя создавать дерево из трёх и более вершин: тогда второй сам замкнёт цикл и закончит игру. Если же такое дерево создаёт второй, первый немедленно замыкает цикл и достигает своей цели. Оба вынуждены соединять по два ещё не тронутых пряника, пока это возможно.

Положим $m = \lfloor n/2 \rfloor$. После m таких ходов остаётся не больше одного одиночного пряника. Следующий игрок не может сразу проиграть и вынужден соединить разные компоненты, получив дерево хотя бы из трёх вершин. После этого его соперник замкнёт цикл и проиграет.

Если m нечётно, первый всё время соединяет одиночные пряники. Либо второй раньше создаст большое дерево и предоставит первому проигрывающий ход, либо после хода m именно второй будет вынужден создать такое дерево. В обоих случаях первый гарантирует себе проигрыш.

Если m чётно, ту же стратегию применяет второй. Любое отклонение первого позволяет второму немедленно проиграть самому; без отклонений большое дерево вынужден создать первый после хода m. Поэтому первый не может гарантировать себе проигрыш.

Итак, необходимое и достаточное условие есть нечётность $\lfloor n/2 \rfloor$, то есть $n \equiv 2, 3 \pmod 4$.

Критерии оценивания (максимум 15 баллов).

Содержание решения	**Баллы**
Обоснована модель плоского леса и связь первого цикла с отверстием.	3
Доказано наличие проигрывающего хода ровно при наличии компоненты хотя бы из трёх вершин.	4
Построены стратегии первого при нечётном $\lfloor n/2 \rfloor$ и второго при чётном.	5
Обоснован момент вынужденного объединения компонент и получены остатки $2, 3$ по модулю 4.	3