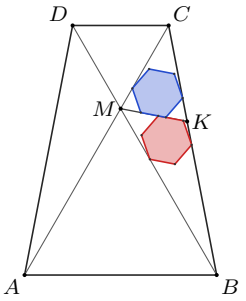
БІРІНШІ БЕТА MANUS ТУРНИРІ

7 – 8 сыныптарға арналған есептер

(Қорытынды ең жақсы нәтиже көрсетілген үш есеп бойынша шығарылады; бір есептің тармақтары үшін ұпайлар қосылады. Нұсқа бойынша ең көп дегенде 50 ұпай жинауға болады. Турнир аяқталғанға дейін есептерді галамторға жариялауға қатаң тыйым салынады. Бұл парақты өзіңізбен бірге алып кетуге болады. Сәттілік тілейміз!)

ұпай есептер

17 1. $ABCD$ теңбүйірлі трапециясында AB және CD табандарының қатынасы $2:1$-ге тең. Диагональдары M нүктесінде қиылысады және $\angle BMC = 120^\circ$. BC бүйір қабырғасынан $BK : KC = 8 : 5$ болатындай K нүктесі алынған.



Фольклор желісі бойынша

BMK және CMK үшбұрыштарының әрқайсысының ішіне бір қабырғасы MK кесіндісінде жататындай ауданы ең үлкен мүмкін дұрыс алтыбұрыш салынған. BMK үшбұрышындағы алтыбұрыш қызыл түске, ал CMK үшбұрышындағы — көк түске боялған.

Осы екі алтыбұрыштың қайсысының ауданы үлкен?

10 2. Сегіз әртүрлі $a_1, a_2, \ldots, a_8$ натурал сандары таңдап алынды. Мұнда

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}}}$$

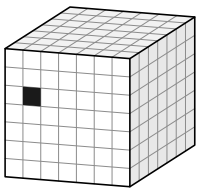
саны бүтін болып шықты. Таңдалған сандардың ең үлкені ең аз дегенде нешеге тең болуы мүмкін?

Кенжегали Нұрас

4 3. $\overline{\text{КРУГ}}$ — дөңгелек сан. $\overline{\text{УГОЛ}}$ санының дөңгелек сан бола алмайтынын дәлелдеңіз.

7-сынып оқушысы ұсынған

18 4. Кубтың әрбір жағы 2027×2027 бірдей шаршы торкөздерге бөлінген. Бастапқы мезетте бір торкөз қара түске боялды.



Бөлінуі схема түрінде көрсетілген.

Әр минут сайын кемінде бір қара торкөзбен ортақ қабырғасы бар барлық ақ торкөздер бір мезгілде қара түске боялады. Кубтың қырлары арқылы өтетін көршілестік те ескеріледі.

Куб бетінің толық боялу уақытының барлық мүмкін мәндерін табыңыз (минутпен).

Иван Ященко + толықтыру

8 5. Ұзындығы 20 км болатын жол A пунктінен басталып, B пунктінде аяқталады. Алғашқы 10 км асфальтпен қапталған, ал қалған 10 км — қаражол. Петя мен Вася бір мезгілде A және B пункттерінен бір-біріне қарама-қарсы бағытта жолға шықты. Асфальт бойымен Петя 6 км/сағ, ал Вася 4 км/сағ жылдамдықпен жүреді, ал қаражолда екеуінің де жылдамдығы бірдей белгісіз бір (бірден үлкен) есеге азаяды. Олар қаражол бөлігі басталған жерден 3 км қашықтықта кездесті.

Осыдан кейін ескі асфальттың біткен жерінен бастап қаражолдың бір бөлігіне асфальт төсеу ұйғарылды. Келесі жолы Петя мен Вася жолдың қарама-қарсы шеттерінен бір уақытта шығуы мүмкін, бірақ кімнің A-дан, ал кімнің B-дан шығатыны алдын ала белгісіз. Олардың қай пункттен шыққанына қарамастан кездесу міндетті түрде асфальтта өтуі үшін, қаражолдың кем дегенде қандай ұзындығына асфальт төсеу қажет?

Таған Әділет

15 6. Тақтада екі өрнек жазылған:

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 \qquad \text{және} \qquad 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1.$$

Бірінші өрнекте сандар мен амал таңбаларының ретін өзгертпей, жақшаларды кез келген тәсілмен қойып шықты. Екінші өрнекте жақшалар дәл осы сұлба бойынша қойылды. Нәтижесінде екі өрнектің де мәні әртүрлі натурал сандар болып шықты. Осы екі санның кішісі ең көп дегенде нешеге тең бола алады?

Сондер Таерин

БІРІНШІ БЕТА MANUS ТУРНИРІ

9 – 10 сыныптарға арналған есептер

(Қорытынды ең жақсы нәтиже көрсетілген үш есеп бойынша шығарылады; бір есептің тармақтары үшін ұпайлар қосылады. Нұсқа бойынша ең көп дегенде 50 ұпай жинауға болады. Турнир аяқталғанға дейін есептерді галамторға жариялауға қатаң тыйым салынады. Бұл парақты өзіңізбен бірге алып кетуге болады. Сәттілік тілейміз!)

ұпай есептер

2 1. $\overline{\text{КРУГ}}$ — дөңгелек сан. $\overline{\text{УГОЛ}}$ санының дөңгелек сан бола алмайтынын дәлелдеңіз.

7-сынып оқушысы ұсынған

2. Кез келген оң нақты x саны үшін шексіз тізбек құрастырылады: $f_1(x) = \{x\}$, ал барлық бүтін $n \geq 1$ үшін $f_{n+1}(x) = \{x \cdot f_n(x)\}$ (мұндағы $\{t\}$ арқылы t санының бөлшек бөлігі белгіленген).

5 а) Кез келген $n \geq 1$ үшін $f_n(x)$ тізбегі бірсарынды кемитін, бірақ оның бірде-бір мүшесі нөлге тең болмайтындай иррационал $x > 1$ саны табыла ма?

3 б) Қандай да бір нақты $x > 1$ саны үшін $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ сандар үштігі қатаң кемитін геометриялық прогрессия құрап, сонымен бірге $f_4(x) > f_1(x)$ теңсіздігі орындалуы мүмкін бе?

Сондер Таерин

10 3. Әрқайсысының ауданы 1-ге тең екі бірдей шаршы қағаз парағы ортақ центрлері беттесетіндей етіп бірінің үстіне бірі қойылды. Осыдан кейін парақтардың бірін ортақ центрі маңында кез келген бір бұрышқа бұрды. Екі шаршының ортақ бөлігінің ең кіші мүмкін ауданын табыңыз.

Отар Ерназар

18 4. Кубтың барлық алты жағына жанасатындай етіп оған шар іштей сызылды. Содан кейін куб өзара қос-қостан перпендикуляр үш жазықтықпен қиылды. Олардың әрқайсысы кубтың барлық алты жағын қиып өтті және алынған үш қиманың барлығы алтыбұрыштар болып шықты. Осы үш жазықтықтың ортақ қиылысу нүктесін P деп белгілейік. P нүктесі қатаң түрде кубтың ішінде, бірақ оған іштей сызылған шардың сыртында жататындай етіп жазықтықтарды орналастыруға бола ма? (Жазықтықтардың ешқайсысы куб центрі арқылы өтуге міндетті емес; алтыбұрыштар кез келген болуы мүмкін, дұрыс болуы міндетті емес.)

Кенжеғали Нұрас

17 5. Центрі O нүктесі болатын ω шеңберіне дөңес $ABCD$ төртбұрышы іштей сызылған. AB және CD түзулері X нүктесінде, AD және BC түзулері Y нүктесінде, ал AC және BD диагональдары Z нүктесінде қиылысады. OX түзуі YZ түзуін H нүктесінде, ал OY түзуі XZ түзуін K нүктесінде қияды. X, Y, H, K нүктелерінің бір шеңбердің бойында жататынын дәлелдеңіз.

Кенжеғали Нұрас

15 6. Үстел үстінде $n \geq 3$ бөлек дөңгелек пряник жатыр. Екі кондитер кезектесіп, бастапқы екі пряникті қамырдан жасалған жұқа қосқышпен жалғайды. Қосқыштарды иіп жүргізуге болады, бірақ оларды өзара қиылыстыруға, өз-өзіне тұйықтауға немесе басқа пряниктерге тигізуге болмайды. Кез келген екі пряниктің арасында бір ғана қосқыш жүргізуге рұқсат етіледі. Жүрісінен кейін пайда болған фигурада алғаш рет тұйық саңылау (дөңгелек тоқаш тәрізді) пайда болған ойыншы жеңіледі. n-нің қандай мәндерінде екінші кондитер оған әдейі кедергі жасауға тырысса да, бірінші кондитер өзінің жеңілуіне кепілдік бере алады?

Кенжеғали Нұрас, Наурузбеков Мадияр