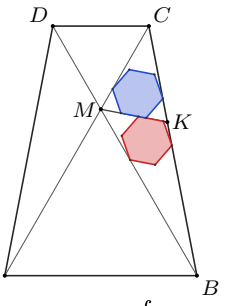
ПЕРВЫЙ БЕТА ТУРНИР MANUS

Задачи для 7 – 8 классов

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются. Максимально за вариант можно получить 50 баллов. Задачи турнира запрещается публиковать в сеть до проведения и окончания самого турнира. Этот листок вы можете забрать с собой. Желаем удачи!)

баллы задачи

В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AB и CD относятся как $2:1$. Диагонали пересекаются в точке M, причём $\angle BMC = 120°$. На боковой стороне BC выбрана точка K так, что $BK : KC = 8:5$.



17 1. В каждый из треугольников BMK и CMK помещён правильный шестиугольник наибольшей возможной площади при условии, что одна из его сторон лежит на отрезке MK. Шестиугольник в BMK окрашен красным, а в CMK — синим.

Какой из двух шестиугольников имеет большую площадь?

По мотивам фольклора

10 2. Выбраны восемь различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Оказалось, что число

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}}}$$

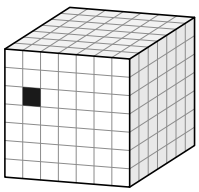
целое. Каким наименьшим может быть самое большое из выбранных чисел?

Кенжегали Нурас

4 3. $\overline{\text{КРУГ}}$ — круглое число. Докажите, что $\overline{\text{УГОЛ}}$ круглым числом являться не может.

Предложена учеником 7 класса

Каждая грань куба разбита на 2027×2027 одинаковых квадратных клеток. В начальный момент одну клетку закрасили чёрным.



18 4. Через каждую минуту одновременно закрашиваются все белые клетки, имеющие общую сторону хотя бы с одной чёрной. Соседство через рёбра куба тоже учитывается.

Найдите все возможные значения времени полного закрашивания поверхности куба (в минутах).

Иван Ященко + дополнение

5. Дорога длиной 20 км начинается в пункте A и заканчивается в пункте B. Первые 10 км покрыты асфальтом, оставшиеся 10 км — грунтовая дорога. Петя и Вася одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B. По асфальту Петя идёт со скоростью 6 км/ч, Вася — 4 км/ч, а на грунтовой дороге скорости обоих уменьшаются в одно и то же неизвестное число раз, большее единицы. Они встретились в 3 км от начала грунтового участка.

8 После этого решили заасфальтировать часть грунтовой дороги, начиная от конца старого асфальта. В следующий раз Петя и Вася могут отправиться одновременно из противоположных концов дороги, причём заранее неизвестно, кто выйдет из A, а кто из B. Какую наименьшую длину грунтовой дороги необходимо заасфальтировать, чтобы независимо от распределения пунктов отправления встреча происходила на асфальте?

Таган Адилет

6. На доске написаны два выражения:

$$1:2:3:4:5:6:7 \qquad \text{и} \qquad 7:6:5:4:3:2:1.$$

15 В первом выражении расставили скобки произвольным образом, не изменяя порядок чисел и знаков. Во втором выражении расставили скобки точно по той же схеме. Оказалось, что значения обоих выражений — различные натуральные числа. Какое наибольшее значение может иметь меньшее из этих двух чисел?

Сондер Таерин

ПЕРВЫЙ БЕТА ТУРНИР MANUS

Задачи для 9 – 10 классов

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются. Максимально за вариант можно получить 50 баллов. Задачи турнира запрещается публиковать в сеть до проведения и окончания самого турнира. Этот листок вы можете забрать с собой. Желаем удачи!)

баллы задачи

2 1. $\overline{\text{КРУГ}}$ — круглое число. Докажите, что $\overline{\text{УГОЛ}}$ круглым числом являться не может.

Предложена учеником 7 класса

2. Для каждого положительного действительного x строится бесконечная последовательность: $f_1(x) = \{x\}$, а $f_{n+1}(x) = \{x \cdot f_n(x)\}$ при всех целых $n \geq 1$ (где $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t).

5 а) Существует ли такое иррациональное число $x > 1$, для которого последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает при всех $n \geq 1$, но ни один её член не равен нулю?

3 б) Может ли для некоторого действительного $x > 1$ тройка чисел $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ образовать строго убывающую геометрическую прогрессию, если при этом выполнено неравенство $f_4(x) > f_1(x)$?

Сондер Таерин

10 3. Два одинаковых квадратных листа бумаги площадью 1 каждый наложили друг на друга так, что их центры совпали. После этого один лист повернули вокруг общего центра на произвольный угол. Найдите наименьшую возможную площадь общей части двух квадратов.

Отар Ерназар

18 4. В куб вписали шар, касающийся всех шести его граней. Затем куб пересекли тремя попарно перпендикулярными плоскостями. Каждая из них пересекла все шесть граней куба, причём все три полученных сечения оказались шестиугольниками. Обозначим через P общую точку этих трёх плоскостей. Можно ли расположить плоскости так, чтобы точка P находилась строго внутри куба, но вне вписанного в него шара? (Ни одна из плоскостей не обязана проходить через центр куба; шестиугольники могут быть произвольными, не обязательно правильными.)

Кенжегали Нурас

17 5. В окружность ω с центром O вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке X, прямые AD и BC — в точке Y, а диагонали AC и BD — в точке Z. Прямая OX пересекает прямую YZ в точке H, а прямая OY пересекает прямую XZ в точке K. Докажите, что точки X, Y, H, K лежат на одной окружности.

Кенжегали Нурас

15 6. На столе лежат $n \geq 3$ отдельных круглых пряников. Два кондитера по очереди соединяют два исходных пряника тонкой перемычкой из теста. Перемычки можно изгибать, но нельзя пересекать между собой, замыкать сами на себя или касаться ими посторонних пряников. Между каждой парой пряников разрешена только одна перемычка. Проигрывает тот, после чьего хода в получившейся фигуре впервые появится замкнутое отверстие — как у бублика. При каких n первый кондитер может гарантировать себе проигрыш, даже если второй намеренно старается ему помешать?

Кенжегали Нурас, Наурузбеков Мадияр